Algèbre linéaire 2 : pratique - Feuille de TD 1

25-26 Septembre 2024

Virginio Fratianni
Licence 2 Mathématiques - année 2024/25
Université Paris 8

Echauffement

Exercice 1 (Calcul matriciel)**.** Soient A, B et C les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer la matrice $A^2 + BC^T$, où C^T représente la transposée de la matrice C.

Exercice 2 (Inversion matricielle)**.** Soient A, B, C et D les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si elles sont inversibles, et le cas échéant, calculer leur inverse.

Révision du cours Algèbre linéaire 1

Exercice 3 (Systèmes linéaires)**.** En utilisant l'algorithme du pivot de Gauss–Jordan, décrire l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + z = 0 \\ 2x - y + w = 0 \\ 3x - y + z + w = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + z = 0 \\ 2x - y + w = 0 \\ 3x - y + z + w = 0 \end{cases}.$$

Exercice 4 (Systèmes linéaires à paramètre)**.** Dans cet exercice, on fixe h un paramètre réel. Déterminer, selon la valeur de h, l'ensemble des solutions du système linéaire d'inconnues x, y et z suivant :

$$\begin{cases} x + 2hy - 2z = -3 \\ x + 2z = -4 \\ -2y + hz = 0 \end{cases}.$$

Exercice 5 (L'espace vectoriel $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$)**.** Rappeler comment sont définies l'addition $+$ et la multiplication externe usuelle $\cdot$ dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. Ensuite, pour chacune des parties suivantes, indiquer si elle forme un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$:

$$A = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a, b, c \in \mathbb{R}\,, a \geq 0\},\;\; B = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a, b, c \in \mathbb{R}\,, a + b + c = 0\},$$

$$C = \{(1, a, a^2) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a \in \mathbb{R}\},\;\; D = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a, b, c \in \mathbb{R}\,, a + 2b + c = 0,\; a + 5c = 0\}.$$

Exercice 6 (Base et dimension)**.** Exprimer la dimension et donner une base pour les sous-espaces vectoriels de l'exercice précédent. De plus, faire la même chose pour

$$\begin{gathered} V = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \,|\, p(1) = 0\}, \\ W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \,|\, p^{'''}(\pi) = p(0)\}, \\ V \cap W, \\ V + W, \end{gathered}$$

sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[x]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3.

Exercice 7 (Dimension et équations)**.** Soit

$$V = \mathrm{Vect}\Big\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \Big\} \leq \mathbb{R}^3.$$

Donner la dimension de V ainsi qu'un système d'équations de cardinal minimal qui représente V.

Exercice 8 (Noyau et image d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$)**.** Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application suivante :

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x \\ x + y + z \\ 2x - 3y + z \end{pmatrix}.$$

— Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

— Déterminer une base du noyau de φ, puis une base de l'image de φ.

— L'endomorphisme φ est-il injectif ? Surjectif ? Est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 9 (Autour de la notion de projecteur vectoriel)**.** Soient $\mathbb{K}$ un corps et V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit qu'un endomorphisme $\pi \in \mathcal{L}(V)$ est un projecteur si et seulement si $\pi \circ \pi = \pi$. Le but de cet exercice est de démontrer, sur un exemple particulier de projecteur vectoriel π, que $V = \mathrm{Ker}(\pi) \oplus \mathrm{Im}(\pi)$.

$$\pi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}.$$

— Démontrer que π est un projecteur vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et donner une interprétation géométrique de cette application.

— Déterminer une base du noyau de π, puis une base de l'image de π.

— L'endomorphisme π est-il injectif ? Surjectif ? Est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

— Conclure que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(\pi) \oplus \mathrm{Im}(\pi)$.

Matrice associée à une application linéaire

Soient $\mathbb{K}$ un corps, V et W deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension n et m respectivement. Aussi, soient $\varphi : V \to W$ une application linéaire, $\mathcal{V} = \{v_i, \dots, v_n\}$ une base de V et $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ une base de W. On définit $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)$, la *matrice associée à φ par rapport à les bases $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$* comme suit :

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi) := \big(\varphi(v_1)\ \varphi(v_2)\ \dots\ \varphi(v_n)\big) \in M_{m\times n}(\mathbb{K}),$$

où les vecteurs $\varphi(v_i)$ sont exprimés en colonne et en coordonnées par rapport à la base $\mathcal{W}$.

En particulier, l'application suivante

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}} : \mathrm{Hom}(V, W) &\longrightarrow M_{m\times n}(\mathbb{K}) \\ \varphi &\longmapsto \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels et, étant donné $v \in V$, on a

$$\varphi(v) = Av.$$

En choisissant $\varphi = \mathrm{id}_V$, où id_V est l'identité de V, et $\mathcal{V}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ une autre base de V, on obtient la définition de *matrice de changement de base de $\mathcal{V}$ à $\mathcal{V}'$* :

$$A := \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}(\mathrm{Id}_V) = (v_1\ \dots\ v_n) \in M_{n\times n}(\mathbb{K}),$$

où les vecteurs v_i sont exprimés en colonne et en cordonnées par rapport à la base $\mathcal{V}'$.

Aussi, on peut prouver par exercice que

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}(\mathrm{Id}_V) = \alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(\mathrm{Id}_V)^{-1}.$$

Ces matrices sont appelées matrices de changement de base car elles permettent de changer les bases de référence des matrices associées aux applications linéaires. En fait, étant donné $\mathcal{W}' = \{w_1', \dots, w_m'\}$, une autre base de W, on a l'identité suivante :

$$\alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{W}'}(\varphi) = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}'}(\mathrm{Id}_V)\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)\alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(\mathrm{Id}_V).$$

Donc, ayant fixé les bases $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$, l'isomorphisme $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}$ nous permet de traduire le calcul entre applications linéaires en calcul matriciel. Aussi, la composition entre deux applications linéaires correspond au produit entre les matrices respectives (exercice).

Exercice 10 (Matrice associée à un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$)**.** Soient $\mathcal{V} = \{e_1, e_2\}$, la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application suivante :

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - y \end{pmatrix}$$

- Déterminer $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\varphi)$, la matrice associée à φ dans la base canonique.
- Soit $\mathcal{V}' = \{e_1 + e_2, e_1 + 2e_2\}$. Déterminer les matrices de changement de bases $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
- Déterminer $\alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{V}'}(\varphi)$, la matrice associée à φ dans la base $\mathcal{V}'$.

Exercice 11 (Matrice associée à un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$)**.** Soient $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire de l'exercice 8 et $\mathcal{V} = \{e_1, e_2, e_3\}$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- Déterminer $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\varphi)$, la matrice associée à φ dans la base canonique.
- Soit $\mathcal{V}' = \{e_1 + e_3, 2e_2, e_2 + e_3\}$. Déterminer les matrices de changement de bases $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
- Déterminer $\alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{V}'}(\varphi)$, la matrice associée à φ dans la base $\mathcal{V}'$.

Exercice 12 (*Plus compliqué : retour aux projecteurs vectoriels)**.** Soient $\mathbb{K}$ un corps et V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel tel que

$$V = U \oplus W,$$

pour des sous-espaces appropriés U et W. Soit $\pi : V \to V$ l'application tel que

$$\begin{cases} \pi(u) = u \;\forall\, u \in U \\ \pi(w) = 0 \;\forall\, w \in W \end{cases}.$$

- Montrer que π est bien définie.
- Montrer que π est une application linéaire.
- Montrer que π est un projecteur vectoriel dans le sens de l'exercice 9.
- Soit $\mathcal{V}$ une base de V composée d'une base de $\mathrm{Im}(\pi)$ suivie d'une base de $\mathrm{Ker}(\pi)$. Déterminer $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$.
- Déterminer la matrice associée à π dans la base canonique en fonction de $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$.
- Existe-t-il un moyen de déterminer directement la matrice associée dans la base canonique, sans passer par $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$?
- Montrer que tous les projecteurs dans le sens de l'exercice 9 sont de cette forme, où

$$U = \mathrm{Im}(\pi) \quad \text{et} \quad W = \ker(\pi).$$

Algèbre linéaire 2 : pratique - Feuille de TD 2

2-3 Octobre 2024

Virginio Fratianni
Licence 2 Mathématiques - année 2024/25
Université Paris 8

Calcul des déterminants

Exercice 1 (Méthode de Sarrus)**.** Calculer le déterminant des matrices suivantes en utilisant la méthode de Sarrus.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (Méthode de Sarrus avec un paramètre)**.** Soit $h \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant des matrices suivantes en utilisant la méthode de Sarrus et déterminer les valeurs du paramètre h pour lesquelles les déterminants sont nuls.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h+2 & 0 \\ h^2-1 & 0 & 4-h \\ 1 & 2h-3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} h & h-1 & h \\ 0 & 2h-2 & 0 \\ 1 & h-1 & 2-h \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (Méthode du pivot de Gauss)**.** Calculer le déterminant des matrices suivantes en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 7 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 7 \\ 1 & 0 & 14 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (Le déterminant comme polynôme)**.** En utilisant les propriétés du déterminant (*Proposition 2.2* du polycopié) et une méthode de calcul, exprimer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a+5 & b+2 & 2c \\ c+2 & bc+1 & c \\ 2b & b & bc \end{pmatrix}$$

comme polynôme dans les variables a, b, c. Puis déterminer les valeurs entières de a, b, c pour lesquelles $\det(A) = 165$.

Algèbre linéaire 2 : pratique - Feuille de TD 3

9-10 Octobre 2024

Virginio Fratianni
Licence 2 Mathématiques - année 2024/25
Université Paris 8

Calcul des déterminants

Exercice 1 (Méthode des cofacteurs)**.** Calculer le déterminant des matrices suivantes en utilisant la méthode des cofacteurs (formules de Laplace).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 7 & -5 \\ -7 & 0 & -3 & -5 \\ 5 & 9 & -1 & 8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 8 & 2 \\ 7 & 2 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (Formule de Binet)**.** Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. Prouver les propositions suivantes.

1. $\det(A + B^T) = \det(A^T + B)$.
2. Si $A^2 = 0$, alors $\det(A) = 0$.
3. Si $A^2 = A$, alors $\det(A) \geq 0$.
4. $\det(A^T A) \geq 0$.
5. Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
6. Si $n = 3$ et A est antisymétrique (i.e. $A^T = -A$), alors $\mathrm{rg}(A) < 3$.
7. Si n est impair et A est antisymétrique, alors $\mathrm{rg}(A) < n$.

Déterminant, bases et rang

Exercice 3 (Dépendance linéaire dans $\mathbb{R}^3$)**.** En utilisant le déterminant, déterminer si le vecteur

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est une combinaison linéaire des vecteurs suivants

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (Base de l'espace des polynômes)**.** Déterminer pour quelles valeurs de $h \in \mathbb{R}$ l'ensemble des polynômes suivants

$$\mathcal{B} = \{3 - 3x - 6x^2, 1 - x + hx^2, 2 + hx - 4x^2\}$$

constitue une base de $\mathbb{R}_2[x]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2.

Exercice 5 (Automorphismes et déterminant)**.** Soient $\mathcal{V} = \{e_1, e_2\}$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application tel que

$$\varphi_\alpha(e_1) = \alpha e_1 + e_2, \;\; \varphi_\alpha(e_2) = \alpha e_2 - e_1.$$

Montrer que φ_α est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ pour chaque valeur réelle de α.

Matrice inverse et déterminant

Exercice 6 (Comatrices)**.** Soient A, B et C les matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \;\; B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \;\; C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pour chaque matrice, calculer la respective comatrice et vérifier la formule :

$$(\mathrm{com} A)^T A = \det(A) \cdot I_n.$$

Exercice 7 (Comatrices et inverses)**.** Soient A et B les matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \;\; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour chaque matrice, déterminer les inverses respectives via les comatrices (si possible).

Exercice 8 (Inverse paramétrique)**.** Déterminer pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -2\alpha & -3 \\ 0 & \alpha & -1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

est inversible. Pour ces valeurs, déterminer l'inverse A_α^{-1}.

Exercice 9 (*Plus compliqué : les matrices napoléoniennes)**.** Calculer le déterminant des matrices suivantes en forme de N ou "napoléoniennes" :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \;\; B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 10 \\ 3 & 5 & 0 & 9 \\ 2 & 0 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, soient $\mathbb{K}$ un corps, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, et on considère les *matrices napoléoniennes* $N_n \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ définies par :

$$N_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \epsilon(j,j) + \sum_{j=2}^{n} b_j \epsilon(j,1) + \sum_{j=1}^{n-1} c_j \epsilon(j,n),$$

où les scalaires $a_1, a_2, \ldots, c_{n-1}$ appartiennent à $\mathbb{K}$ et $\{\epsilon(i,j) \,|\, 1 \leq i,j \leq n\}$ est la base canonique de $M_{n\times n}(\mathbb{K})$, donc $\epsilon(i,j)$ est la matrice ayant 1 dans la coordonnée (i,j) et 0 ailleurs.

1. Écrire les matrices et calculer le déterminant de N_n pour $n = 3, 4$.
2. Écrire et prouver une formule générale pour $\det(N_n)$, pour chaque n.
3. **Bonus :** faire exactement la même chose pour les matrices Z_n en forme de Z.

Algèbre linéaire 2 : pratique - Feuille de TD 4

16-17 Octobre 2024

Virginio Fratianni
Licence 2 Mathématiques - année 2024/25
Université Paris 8

Valeurs et espaces propres

Exercice 1 (Déterminant d'un endomorphisme). Soient $\mathbb{R}_2[x]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réel de degré au plus 3 et $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ l'application tel que :

$$\varphi(a + bx + cx^2) = -b + ax + cx^2,$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Aussi, soient $\mathcal{V} = \{1, x, x^2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ et $\mathcal{V}' = \{1+x, 2x, x^2\}$.

- Montrer que φ est un endomorphisme.
- Déterminer $\mu_{\mathcal{V}}(\varphi)$, la matrice de φ dans la base canonique $\mathcal{V}$.
- Montrer que $\mathcal{V}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.
- Déterminer $\mu_{\mathcal{V}'}(\varphi)$, la matrice de φ dans la base $\mathcal{V}'$.
- Calculer $\det(\mu_{\mathcal{V}}(\varphi))$ et $\det(\mu_{\mathcal{V}'}(\varphi))$ pour vérifier que les deux déterminants sont égaux.
- Plus généralement, soient V un espace vectoriel sur un corps K de dimension n, $\mathcal{V}$ une base de V et $\varphi : V \to V$ un endomorphisme de V. Montrer que la définition

  $$\det(\varphi) := \det(\mu_{\mathcal{V}}(\varphi))$$

  est cohérente, c'est à dire qu'elle ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{V}$.

Exercice 2 (Valeurs et espaces propres). Soit $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ l'endomorphisme de l'exercice précédent. Déterminer le polynôme caractéristique de φ, les valeurs propres et les espaces propres respectifs.

Faire la même chose pour les matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (Vecteur propre). Soit $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que

$$\varphi(x, y, z, w) = (7x + 2y + 5w, 6x + 3y + 2w, 4x + 2y + 3z, 3w).$$

Déterminer si le vecteur

$$v = (1, -3, 1, 0)$$

est un vecteur propre de φ et, si c'est le cas, déterminer la valeur propre correspondante.

Exercice 4 (Vecteur propre paramétrique)**.** Calculer, si elles existent, les valeurs du paramètre $h \in \mathbb{R}$ telles que le vecteur

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit un vecteur propre de l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x + 2z \\ x + y - 2z \\ z \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 (Intersection d'espaces propres)**.** Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes d'un endomorphisme $\varphi : V \to V$, où V est un espace vectoriel de dimension n sur un corps K. Montrer que les espaces propres E_1 et E_2 associés respectivement à λ_1 et λ_2 ont intersection réduite à $\{0\}$.

Exercice 6 (Matrices diagonales et triangulaires)**.** Déterminer les valeurs propres et les espaces propres respectifs d'une matrice diagonale. Déterminer les valeurs propres d'une matrice triangulaire.

Exercice 7 (Le polynôme caractéristique)**.** Soient $A \in M_n(K)$ une matrice carrée $n \times n$ à coefficients dans un corps K et $\chi_A(x)$ son polynôme caractéristique. Montrer (par récurrence) que :

— $\chi_A(x)$ est un polynôme de degré n.

— Le coefficient de x^n est $(-1)^n$.

— Le coefficient de x^{n-1} est $(-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)$.

Exercice 8 (L'espace vectoriel des matrices)**.** Soit $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices 3×2 à coefficients réels et $\varphi : M_{3\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ l'application tel que :

$$\varphi \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{12} \\ a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{32} \end{pmatrix},$$

où $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$.

— Montrer que φ est un endomorphisme.

— Déterminer le polynôme caractéristique de φ, les valeurs propres et les espaces propres respectifs.

Algèbre linéaire 2 : pratique - Feuille de TD 5

23-24 Octobre 2024

Virginio Fratianni
Licence 2 Mathématiques - année 2024/25
Université Paris 8

Diagonalisation et triangularisation

Exercice 1 (Multiplicité algébrique et géométrique)**.** Soient $\varphi : V \to V$ un endomorphisme d'un espace vectoriel V de dimension n sur un corps K et λ une valeur propre de φ. Prouver l'inégalité

$$1 \leq \dim(\ker(\varphi - \lambda \mathrm{Id}_V)) \leq m_\lambda(\chi_\varphi(x)).$$

Exercice 2 (Diagonalisation d'une matrice)**.** Soit A la matrice réelle suivante :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

— Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A(x)$.

— Déterminer les valeurs propres de A et leurs multiplicités algébriques.

— Pour chaque valeur propre, déterminer le respectif espace propre.

— Prouver que A est diagonalisable.

— Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que

$$D = P^{-1}AP.$$

Exercice 3 (Diagonalisation d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$)**.** Soient $\mathcal{V} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que, en base canonique :

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 \\ -x_2 - 2x_3 - x_4 \\ 5x_3 - 2x_4 \\ x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}.$$

— Déterminer $\mu_{\mathcal{V}}(\varphi)$, la matrice associée à φ dans la base canonique.

— Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_\varphi(x)$.

— Déterminer les valeurs propres de φ et leurs multiplicités algébriques.

— Pour chaque valeur propre, déterminer le respectif espace propre.

- Prouver que φ est diagonalisable.
- Déterminer une base $\mathcal{V}'$ de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres et la matrice de changement de base $\mu_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})$.
- Déterminer la matrice diagonale $\mu_{\mathcal{V}'}(\varphi)$ telle que

$$\mu_{\mathcal{V}'}(\varphi) = (\mu_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}))^{-1}\mu_{\mathcal{V}}(\varphi)\mu_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}).$$

Exercice 4 (Diagonalisation dans l'espace des polynômes)**.** Soient $\mathbb{R}_2[x]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2, $\mathcal{V} = \{1, x, x^2\}$ sa base canonique et $\psi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ l'endomorphisme tel que

$$\psi(p(x)) = p(2) - 2p'(x).$$

- Déterminer la matrice $\mu_{\mathcal{V}}(\psi)$.
- Déterminer la dimension et une base de $\mathrm{Ker}(\psi)$ et $\mathrm{Im}(\psi)$.
- Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_\psi(x)$.
- Déterminer les valeurs propres de ψ et leurs multiplicités algébriques.
- Pour chaque valeur propre, déterminer le respectif espace propre.
- Déterminer si ψ est diagonalisable, en justifiant la réponse. Si ψ n'est pas diagonalisable, est-il triangularisable ?

Exercice 5 (Diagonalisation dans l'espace des matrices)**.** Soient M la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels et $\gamma : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ l'endomorphisme tel que

$$\gamma(X) = 2X + MX.$$

Aussi, soit $\mathcal{V} = \{\epsilon(i,j) \,|\, 1 \leq i,j \leq 2\}$ la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$, où $\epsilon(i,j)$ est la matrice ayant 1 dans la cordonnée (i,j) et 0 ailleurs.

- Déterminer $\mu_{\mathcal{V}}(\gamma)$.
- Déterminer la dimension et une base de $\mathrm{Ker}(\gamma)$ et $\mathrm{Im}(\gamma)$.
- Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_\gamma(x)$.
- Déterminer les valeurs propres de γ et leurs multiplicités algébriques.
- Pour chaque valeur propre, déterminer le respectif espace propre.
- Déterminer si γ est diagonalisable. Si c'est le cas, présenter une base de $M_2(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres.

Exercice 6 (Diagonalisation paramétrique d'un endomorphisme)**.** Soient $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$, $h \in \mathbb{R}$ et $\varphi_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\varphi_h(v_1) = hv_1 + (h-1)v_2 - v_3,$$

$$\varphi_h(v_2) = v_2 + v_3,$$

$$\varphi_h(v_1 + v_2 + v_3) = hv_1 + hv_2 + (h-1)v_3.$$

— Déterminer $\mu_{\mathcal{V}}(\varphi_h)$, la matrice associée à φ dans la base $\mathcal{V}$.

— Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_{\varphi_h}(x)$.

— Déterminer les valeurs propres de φ_h.

— Déterminer les valeurs réelles de h pour lesquelles l'endomorphisme φ_h est diagonalisable.

Exercice 7 (Un autre endomorphisme paramétrique)**.** Soient $h \in \mathbb{R}$ et $\varphi_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme tel que, en base canonique :

$$\varphi_h(x, y, z) = (hx + y + z, x - hy + z, z).$$

Déterminer les valeurs réelles de h pour lesquelles l'endomorphisme φ_h est diagonalisable.

Exercice 8 (Triangularisation)**.** Soit A la matrice réelle suivante

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

— Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A(x)$.

— Déterminer les valeurs propres de A et leurs multiplicités algébriques.

— Pour chaque valeur propre, déterminer le respectif espace propre.

— Prouver que A est triangularisable mais non diagonalisable.

— Déterminer une matrice triangulaire supérieure T_1 et une matrice inversible P telles que

$$T_1 = P^{-1}AP.$$

— Déterminer une matrice triangulaire inférieure T_2 et une matrice inversible Q telles que

$$T_2 = Q^{-1}AQ.$$

Algèbre linéaire 2 : pratique - Feuille de TD 6

6-7 Novembre 2024

Virginio Fratianni
Licence 2 Mathématiques - année 2024/25
Université Paris 8

Orthogonalité

Exercice 1 (Matrice d'un produit scalaire)**.** Soit E un espace euclidien de dimension n sur un corps K et muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Aussi, soient $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ une base de E et Φ la matrice associée au produit scalaire de E dans la base $\mathcal{V}$.

1. Montrer que Φ est symétrique.
2. Montrer que Φ est inversible.
3. Soient $u, v \in E$. Montrer que

$$\langle u, v \rangle = (u_1, \ldots, u_n)\Phi(v_1, \ldots, v_n)^T.$$

Exercice 2 (Produit scalaire dans l'espace des matrices)**.** Soient $E = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ et $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in E$.

— Montrer que

$$\mathrm{Tr}(A^T B) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

— Montrer que l'application

$$\langle A, B \rangle := \mathrm{Tr}(A^T B)$$

est un produit scalaire.

— Soient $n = 2$ et $\mathcal{V} = \{\epsilon(i,j) \,|\, 1 \leq i,j \leq 2\}$ la base canonique de $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ (donc $\epsilon(i,j)$ est la matrice ayant 1 dans la coordonnée (i,j) et 0 ailleurs). Déterminer la matrice Φ associée au produit scalaire dans la base $\mathcal{V}$.

Exercice 3 (Produit scalaire déterminé par $A^T A$)**.** Soient $E = \mathbb{R}^n$, $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ de rang n et $u, v \in E$.

— Montrer que l'application

$$\langle u, v \rangle = (u_1, \ldots, u_n)A^T A \begin{pmatrix} v_i \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

est un produit scalaire sur E, où les vecteurs u et v sont écrits en cordonnées dans la base canonique.

— Soient
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$\mathcal{V} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{V}' = \{e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_3\}$ une autre base. Déterminer la matrice Φ associée au produit scalaire dans la base canonique et la matrice Φ' associée au produit scalaire dans la base $\mathcal{V}'$.

Exercice 4 (Produit scalaire dans l'espace des polynômes)**.** Soient $E = \mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $x_1, \ldots, x_{n+1}$ $n+1$ nombres réels différents.

— Montrer que l'application
$$\langle p(x), q(x) \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} p(x_i) q(x_i)$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.

— Soit $n = 2$, $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$ et $\mathcal{V} = \{1, x, x^2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$. Déterminer la matrice Φ associé au produit scalaire dans la base $\mathcal{V}$.

— Soit $n = 2$ et
$$\langle x, x \rangle = 25.$$
Sachant que x_1, x_2, x_3 sont des entiers non négatifs, calculer
$$\langle 1 + x, x^2 \rangle.$$

— Soit $n = 5$. Existe-t-il des valeurs réelles différentes $x_1, \ldots, x_6$ telles que les polynômes $p(x) = x$ et $q(x) = x^3$ soient orthogonaux ?

— Plus en général, soient i, j des entiers non négatifs tels que $i, j \leq n$ et $i + j$ soit pair. Existe-t-il des valeurs réelles différentes $x_1, \ldots, x_{n+1}$ telles que les polynômes $p(x) = x^i$ et $q(x) = x^j$ soient orthogonaux ?

Exercice 5 (Orthogonalité dans $\mathbb{R}^3$)**.** Soient
$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Déterminer un vecteur w orthogonal à u et v et tel que $\langle w, w \rangle = 1$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6 (Orthogonalité paramétrique)**.** Soient
$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 4 \end{pmatrix}$$
deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la valeur du paramètre réel a telle que u et v soient orthogonaux par rapport au produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7 (Orthogonalité dans l'espace des matrices)**.** Soient
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Déterminer une matrice $D \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ qui soit orthogonale à A, B, C et telle que $\langle D, D \rangle = 2$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire sur $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ défini dans l'exercice 2.

Algèbre linéaire 2 : pratique - Feuille de TD 7

13-14 Novembre 2024

Virginio Fratianni
Licence 2 Mathématiques - année 2024/25
Université Paris 8

Méthode de Gauss pour les formes quadratiques

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que

$$\varphi(u, v) = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 2u_3v_3 - 2(u_1v_2 + u_2v_1) + 2(u_1v_3 + u_3v_1) - (u_2v_3 + u_3v_2)$$

n'est pas un produit scalaire.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que

$$\varphi(u, v) = 2u_1v_1 + 3u_2v_2 + 2u_3v_3 - 2(u_1v_2 + u_2v_1) - (u_2v_3 + u_3v_2)$$

est un produit scalaire et déterminer la matrice associée dans la base canonique.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que

$$\varphi(u, v) = \frac{1}{2}(u_1v_2 + u_2v_1 + u_2v_3 + u_3v_2 + u_1v_3 + u_3v_1)$$

n'est pas un produit scalaire.

*Plus compliqué : écrire la forme quadratique associée à φ comme combinaison de carrés de formes linéaires.

Exercice 4 (*Plus compliqué)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que

$$\varphi(u, v) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 - u_1v_2 - u_2v_1 - u_2v_3 - u_3v_2 - u_1v_3 - u_3v_1$$

n'est pas un produit scalaire.

Algèbre linéaire 2 : pratique - Feuille de TD 8

20-21 Novembre 2024

Virginio Fratianni
Licence 2 Mathématiques - année 2024/25
Université Paris 8

Norme et angle

Exercice 1 (Angles dans $\mathbb{R}^3$)**.** Déterminer la valeur du paramètre réel t telle que l'angle entre les vecteurs u et v (par rapport au produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^3$) soit égal à $\frac{\pi}{3}$, où

$$u = (1, 2, 1), \;\; v = (1, 0, t).$$

Exercice 2 (La norme à partir de l'angle)**.** Soient E un espace euclidien et u, v deux de ses vecteurs. Déterminer la norme de v sachant que

$$\|u\|_\varphi = 2, \;\; \varphi(u, v) = 3, \;\; \theta = \frac{\pi}{6},$$

où θ est l'angle entre les deux vecteurs.

Exercice 3 (Angle aigu dans $\mathbb{R}^3$)**.** Déterminer le vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ de norme 2 qui soit orthogonal aux vecteurs

$$v = (1, 4, 2), \;\; w = (5, 1, 1)$$

et qui forme un angle aigu avec l'axe y (donc, de direction $(0, 1, 0)$).

Exercice 4 (Angle dans l'espace des polynômes)**.** Soient $E = \mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $x_1, \ldots, x_{n+1}$ $n + 1$ nombres réels différents. Dans la feuille de TD 6 on a montré que l'application

$$\varphi(p(x), q(x)) = \sum_{i=1}^{n+1} p(x_i)q(x_i)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.

Soit $n = 2$ et

$$\langle x, x\rangle = 25.$$

Sachant que x_1, x_2, x_3 sont des entiers non négatifs, déterminer l'angle entre les polynômes $p(x) = 1 + x$ et $q(x) = x^2$.

Exercice 5 (Angle dans l'espace des matrices)**.** Soient $A, B \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'angle entre les deux matrices par rapport au produit scalaire φ introduit dans la feuille de TD 6, donc

$$\varphi(AB) = \mathrm{Tr}(A^T B).$$

Exercice 6 (Angle avec produit scalaire non standard)**.** Soient E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une application bilinéaire symétrique telle que

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est la matrice associée à φ dans la base canonique.

— Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

— Déterminer l'angle entre les vecteurs en cordonnées dans la base canonique :

$$u = (1, 1, 1), \quad v = (1, 0, 1).$$

Exercice 7 (Relation entre produit scalaire et norme)**.** Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, φ un produit scalaire sur E et $\|\cdot\|_\varphi$ la norme induite par φ.

— Montrer que, pour $u, v \in E$, on a la relation suivante

$$\varphi(u, v) = \frac{1}{2}(\|u+v\|_\varphi^2 - \|u\|_\varphi^2 - \|v\|_\varphi^2).$$

— Déterminer l'angle entre les vecteurs u et v sachant que

$$\|u\|_\varphi = 3, \quad \|v\|_\varphi = 5, \quad \|u+v\|_\varphi = 7.$$

Exercice 8 (Plus compliqué* : loi du parallélogramme et normes non induites par des produits scalaires)**.** Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, φ un produit scalaire sur E et $\|\cdot\|_\varphi$ la norme induite par φ.

— Montrer que, pour $u, v \in E$, on a la relation suivante, appelée *loi du parallélogramme*

$$2\|u\|_\varphi^2 + 2\|v\|_\varphi^2 = \|u+v\|_\varphi^2 + \|u-v\|_\varphi^2.$$

Il convient de souligner que, comme l'a observé John von Neumann, l'inverse est également valable, c'est-à-dire que si une norme respecte la loi du parallélogramme, alors il existe un produit scalaire qui l'induit. La démonstration n'est cependant pas immédiate.

— Prouver qu'il existe des normes qui ne sont pas induites par des produits scalaires. En particulier, soit $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application telle que

$$\|u\| = \max\{|u_1|, \dots, |u_n|\}.$$

Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ (elle est souvent appelée norme infinie et notée $\|\cdot\|_\infty$) et qu'elle ne peut pas être induite par un produit scalaire.

Algèbre linéaire 2 : pratique - Feuille de TD 9

27-28 Novembre 2024

Virginio Fratianni
Licence 2 Mathématiques - année 2024/25
Université Paris 8

Bases orthogonales et orthonormée

Exercice 1 (Bases de $\mathbb{R}^3$)**.** Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard. Considérer les vecteurs

$$\mathcal{B} = \{(-1,0,1),(1,0,2),(0,1,0)\}.$$

— Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

— Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à $\mathcal{B}$ pour obtenir une base orthonormée de E.

— Déterminer les cordonnées du vecteur $v = (2,3,0)$ par rapport a la base orthonormée trouvée.

Exercice 2 (Espace des matrices)**.** Soit $E = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\varphi(A,B) = \mathrm{Tr}(A^tB)$. Considérer les vecteurs

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

— Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

— Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à $\mathcal{B}$ pour obtenir une base orthogonal de E.

Exercice 3 (Espace des polynômes)**.** Soit $E = \mathbb{R}_2[x]$, l'espace des polynômes de degré au plus 2 muni du produit scalaire $\varphi(p(x),q(x)) = \sum_{i=1}^{3} p(x_i)q(x_i)$ avec $(x_1,x_2,x_3) = (-1,0,1)$. Considérer les polynômes

$$\mathcal{B} = \{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\}.$$

— Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

— Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à $\mathcal{B}$ pour obtenir une base orthogonal de E.

Exercice 4 (Méthode de Gauss et procédé de Gram-Schmidt)**.** Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ l'application bilinéaire symétrique telle que

$$\varphi(u,v) = 4u_1v_1 + 2u_2v_2 + 9u_3v_3 - 3(u_2v_3 + u_3v_2).$$

— Montrer que φ est un produit scalaire et déterminer la matrice associée dans la base canonique.

— Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour obtenir une base orthonormée.

Exercice 5 (Base orthogonales avec la méthode de Gauss)**.** Soient E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une application bilinéaire symétrique telle que

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

est la matrice associée à φ dans la base canonique.

— Montrer que φ est un produit scalaire sur E, en utilisant la méthode de Gauss.

Noter que, grâce à la méthode de Gauss, on obtient un changement de coordonnées $v = Ru$ tel que

$$\varphi(u, u) = \varphi(R^{-1}v, R^{-1}v) = (R^{-1}v)^t G(R^{-1}v) = v^t(R^{-1})^t G R^{-1} v$$

est une combinaison de carrés, donc $(R^{-1})^t G R^{-1}$ est une matrice diagonale (ici u et v sont les deux vecteurs colonnes, R est la matrice d'ordre n de changement de cordonnées entre u et v et G est la matrice associée au produit scalaire dans la base de départ). Par conséquent, pour obtenir une base orthogonale de E, il suffit de considérer les colonnes de l'inverse de R.

— En utilisant cette méthode, déterminer une base orthogonale de E.

Sous-espaces orthogonaux

Exercice 6 (Espaces orthogonaux dans $\mathbb{R}^4$)**.** Soit V le sous-espace suivant de $\mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire standard :

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_1 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

— Déterminer la dimension et une base de V.

— Déterminer une base orthogonale de V.

— Déterminer la dimension et une base de $V^\perp$.

Exercice 7 (Espaces des polynômes)**.** Soit $E = \mathbb{R}_2[x]$, l'espace des polynômes de degré au plus 2 muni du produit scalaire $\varphi(p(x), q(x)) = \sum_{i=1}^{3} p(x_i)q(x_i)$ avec $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$. Considérer le sous-ensemble

$$V = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(0) = 0\}.$$

— Montrer que V est un sous-espace de E.

— Déterminer la dimension et une base de V.

— Déterminer la dimension et une base de $V^\perp$.

Exercice 8 (Compléter une base orthogonale)**.** Soit $E = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}(A^t B)$. Considérer les vecteurs

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et soit $V = \mathrm{Vect}\{A_1, A_2\}$.

— Déterminer la dimension et une base orthogonal $\mathcal{B}$ de $V^{\perp}$.

— Montrer que

$$\mathcal{B}_1 = \{A_1, A_2\} \cup \mathcal{B}$$

est une base orthogonal de E.

Exercice 9 (Produit scalaire paramétrique)**.** Soient $E = \mathbb{R}^3$, $k \in \mathbb{R}$ un paramètre et $\varphi_k : E \times E \to \mathbb{R}$ l'application bilinéaire symétrique telle que

$$\varphi_k(u, v) = u_1v_1 + u_2v_2 + ku_3v_3 + k(u_1v_2 + u_2v_1).$$

— Déterminer les valeurs réelles du paramètre k pour lesquelles φ_k est un produit scalaire et écrire la matrice associée dans la base canonique.

— Soit $k = \frac{1}{2}$. Considérer le sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$V = \mathrm{Vect}\{(1, 0, 1), (0, 0, 1)\}.$$

Déterminer la dimension et une base de $V^{\perp}$ par rapport à $\varphi_{\frac{1}{2}}$.

Exercice 10 (Somme et intersection de sous-espaces orthogonaux)**.** Soient E un espace euclidien de dimension finie muni du produit scalaire φ et V, W deux sous-espaces vectoriels. Prouver les égalités suivantes.

— $(V + W)^{\perp} = V^{\perp} \cap W^{\perp}$.

— $(V \cap W)^{\perp} = V^{\perp} + W^{\perp}$.

— $(V^{\perp} + W^{\perp})^{\perp} = V \cap W$.

— $(V^{\perp} \cap W^{\perp})^{\perp} = V + W$.

Exercice 11 (Isomorphisme entre E et E^*)**.** Soit E un espace euclidien de dimension finie sur $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$. Montre que l'application $\alpha_\varphi : E \to E^*$ telle que, pour chaque $u \in E$:

$$\begin{aligned} \alpha_\varphi(u) = \varphi_u : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \varphi(u, v) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre E et E^*.

Algèbre linéaire 2 : pratique - Feuille de TD 10

4-5 Décembre 2024

Virginio Fratianni
Licence 2 Mathématiques - année 2024/25
Université Paris 8

Transformations orthogonales

Exercice 1 (Transformation orthogonale et matrice associée)**.** Soient E un espace euclidien de dimension finie, $f : E \to E$ une transformation orthogonale, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $A = \mu_{\mathcal{B}}(f)$, la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}$.

Montrer que les colonnes (ou les lignes) de A forment une base orthonormée de E.

Exercice 2 (Matrice orthogonale)**.** Montrer que la matrice suivante

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est orthogonale.

Exercice 3 (Opérations entre matrices orthogonales)**.** Soient A et B deux matrices orthogonales d'ordre n.

— Montrer que $\det(A) = \pm 1$.

— Montrer que AB est une matrice orthogonale.

— Montrer que A^T est une matrice orthogonale.

— Montrer que A^{-1} est une matrice orthogonale.

Exercice 4 (Symétrie orthogonale)**.** Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'endomorphisme tel que, pour $v \in \mathbb{R}^n$

$$f(v) = 2\pi(v) - v,$$

où π est la projection orthogonale sur V (donc, la projection sur V et parallèle à $V^{\perp}$, venant de la décomposition $\mathbb{R}^n = V \oplus V^{\perp}$).

Montrer que f est une transformation orthogonale. Noter qu'elle est appelée symétrie orthogonale d'axe V.

Endomorphisme adjoint et autoadjoint

Exercice 5 (Orthogonalité entre vecteurs propres)**.** Soient E un espace euclidien de dimension finie, $f : E \to E$ un endomorphisme autoadjoint de E.

Montrer que deux vecteurs propres relatifs à deux valeurs propres différentes sont orthogonaux

Exercice 6 (Diagonalisation orthogonale)**.** Considérer l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$f(x, y, z) = (2x + 4z, 6y, 4x + 2z).$$

— Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint.

— Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de f.

Exercice 7 (Endomorphisme paramétrique)**.** Soient $k \in \mathbb{R}$ un paramètre et A_k la matrice suivante.

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2k & 0 \\ k+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

— Déterminer les valeurs de k pour lesquelles A_k est diagonalisable au moyen d'une matrice orthogonale.

— Pour les valeurs de k trouvées au point précédent, déterminer les valeurs propres de A_k et une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}A_kP$ soit une matrice diagonale.

Exercice 8 (Endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^2$)**.** Soient $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire et symétrique telle que

$$\varphi((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = 5u_1v_1 + 2(u_1v_2 + u_2v_1) + u_2v_2$$

et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$f(x, y) = (-3x + 3y, 7x - 7y).$$

— Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

— Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint par rapport à φ.

— Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ (par rapport à φ) constituée de vecteurs propres de f.

Exercice 9 (Endomorphisme dans l'espace des matrices)**.** Soient $E = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices réelles d'ordre 2 et soit $f : \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ l'endomorphisme tel que

$$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 2a_{12} \\ a_{21} + a_{22} & a_{21} + a_{22} \end{pmatrix}.$$

— Soient $\mathcal{B} = \{\epsilon(i, j) \,|\, 1 \leq i, j \leq 2\}$ la base canonique de $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ (donc $\epsilon(i, j)$ est la matrice ayant 1 dans la coordonnée (i, j) et 0 ailleurs). Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ par rapport au produit scalaire φ tel que $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}(A^TB)$.

— Déterminer $\mu_{\mathcal{B}}(f)$, la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}$.

— Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint par rapport à φ et déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de f.

Exercice 10 (Puissance d'une matrice symétrique)**.** Soit A une matrice symétrique réelle telle que $A^n = I$ pour un certain entier $n \geq 3$. Montrer que $A^2 = I$.